

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

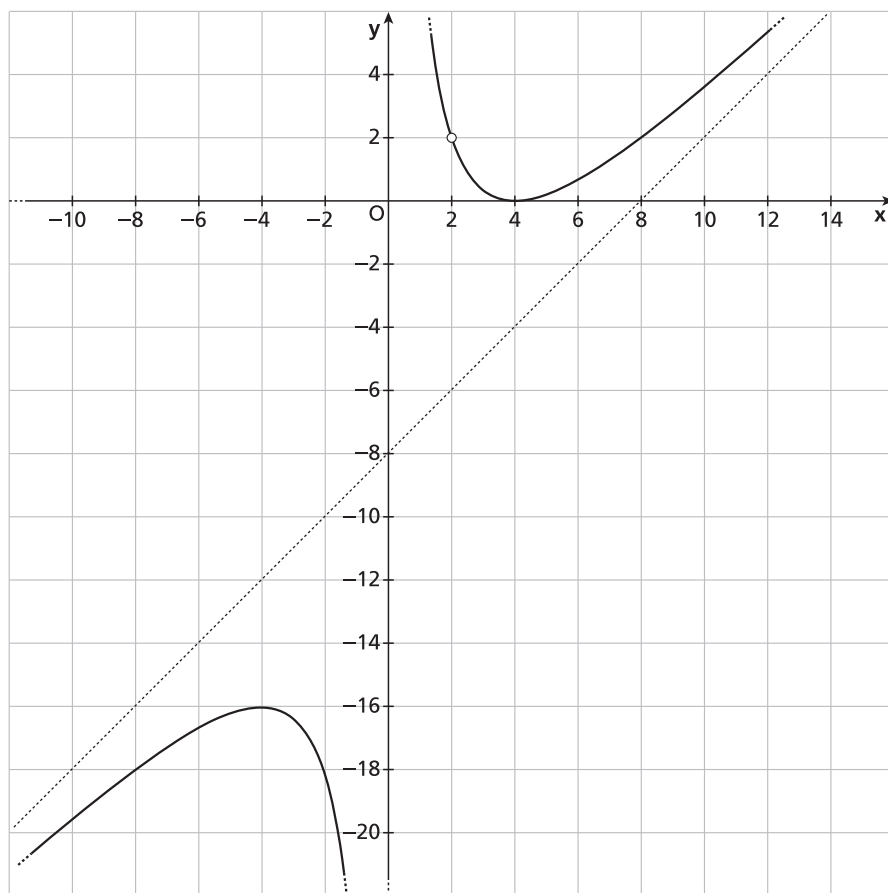
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

PROBLEMA 1

Si consideri il grafico γ in figura, rappresentativo di una funzione $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, dove $A(x)$ e $B(x)$ sono dei polinomi, definita nel dominio $D = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.



■ Figura 1

a. Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f .

Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x)$.

Scrivere le equazioni degli asintoti di f .

b. Supponendo che la funzione f abbia equazione

$$y = \frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$$

determinare i valori dei parametri a, b, c, d .

- c. Dal grafico γ , dedurre i grafici delle funzioni $f(|x|)$ e $\ln(f(x))$ specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.
- d. Si consideri la funzione $F(x) = \int_3^x f(t) dt$, definita nell'intervallo $[3; 8]$. Tracciare un suo grafico rappresentativo Γ , specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto.

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di curve $f_a(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{ax}}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con Γ_a il grafico di f_a .

- Verificare che tutti i grafici Γ_a hanno tre punti in comune e scrivere le loro coordinate.
- Al variare del parametro a , individuare gli intervalli di monotonia di Γ_a , le ascisse degli estremi relativi e dei flessi.
- Determinare i valori del parametro a in modo che il punto F , intersezione di Γ_a con l'asse delle ordinate, sia un punto di flesso. In corrispondenza di tali valori, scrivere le equazioni delle rette tangenti in F .
- Dimostrare che, per ogni valore di $a \neq 0$, le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ordinate. Determinare l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici Γ_1 e Γ_{-1} .

QUESTIONARIO

- È dato un triangolo ABC di lati $AB = a$ e $BC = \sqrt{3a}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
 - Se $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$, allora il triangolo è rettangolo;
 - se il triangolo è rettangolo, allora $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$.
 Motivare le risposte.
- In un salvadanaio ci sono 15 monete, di cui 9 sono da 1 euro e le altre 6 da 2 euro. Se ne estraggono 6 contemporaneamente.
 - Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia esattamente 10 euro?
 - Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia al massimo 10 euro?
- Verificare che i punti $O(0; 0; 0)$, $A(1; 4; 8)$, $B(-6; 0; 12)$ e $C(-7; -4; 4)$ sono complanari. Calcolare area e perimetro del quadrilatero $OABC$ e classificarlo.
- Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right)$, con a parametro reale positivo. Successivamente, individuare il valore di a in corrispondenza del quale risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[1; 7]$ e le coordinate del punto che ne verifica la tesi.
- Determinare i valori dei parametri reali a e b della funzione $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{2x^2 + 5x - 1}$ in modo che essa abbia la retta $y = 2$ come asintoto orizzontale e un punto stazionario per $x = 1$. In corrispondenza dei valori trovati, stabilire se $f(x)$ presenta ulteriori asintoti.
- In un sistema di assi cartesiani Oxy , si consideri l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo. Sia t la retta tangente all'iperbole in un suo punto P . Detti A e B i punti in cui t interseca gli assi del riferimento, dimostrare che i triangoli APO e BPO sono equivalenti e che la loro area non dipende dalla scelta di P .

- 7** Un resistore di resistenza R è percorso da una corrente variabile nel tempo di intensità $I(t) = I_0 \frac{a}{t}$, con $t > 0$ e le costanti positive I_0 e a espresse, rispettivamente, in ampère e in secondi. Sapendo che la potenza dissipata nel resistore per effetto Joule è $P(t) = RI^2(t)$, determinarne il valor medio nell'intervallo $[2a; 3a]$.
- 8** Scrive Leonardo Sinisgalli, in un brano tratto da *Furor Mathematicus*: «Avevo in mente un capitolo sulle leggi del caso: volevo trovare le parentele tra il triangolo di Tartaglia, relativo ai coefficienti del polinomio $(a + b)^n$ e il triangolo aritmetico di Pascal, che ci dà la probabilità di fare m volte croce in n partite giuocate a testa e croce».
- Descrivere il legame esistente tra i coefficienti binomiali e il calcolo delle probabilità.

PROBLEMA 1

- a. La funzione razionale fratta f è definita in $\mathbb{R} - \{0, 2\}$, presenta un unico zero in $x = 4$ e il suo insieme immagine è $]-\infty; -16] \cup [0; +\infty[$.

La funzione ha minimo relativo in $(4; 0)$ e massimo relativo nel punto con ascissa $\simeq -4$ e ordinata $\simeq -16$.

Dal grafico possiamo dedurre che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ e che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, quindi $x = 0$ è asintoto verticale per la funzione, mentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ perciò la funzione non ha asintoti orizzontali.

Agli estremi del dominio infatti la funzione presenta un asintoto obliquo di cui possiamo determinare l'equazione del tipo $y = mx + q$ sapendo che passa per i punti $(0; -8)$ e $(8; 0)$:

$$m = \frac{0+8}{8-0} = 1 \rightarrow y+8 = 1 \cdot (x-0) \rightarrow y = x-8.$$

Dall'equazione dell'asintoto obliquo possiamo ricavare i valori dei limiti richiesti:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = -8$$

- b. La funzione razionale fratta $y = \frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$ ha dominio $\mathbb{R} - \{0, 2\}$, quindi possiamo dedurre che 0 e 2 sono i valori che, assegnati alla variabile x , annullano il denominatore:

per $x = 0$ si annulla il fattore x ;

per $x = 2$ si annulla il fattore $x-d$, per cui $2-d = 0 \rightarrow d = 2$.

Poiché la funzione è tangente all'asse delle ascisse in $x = 4$, 4 è lo zero della funzione di molteplicità doppia, per cui $(4-b)^2 = 0 \rightarrow b = 4$.

Inoltre, poiché $x = 2$ non è un asintoto verticale ma un punto di singolarità eliminabile e il limite della funzione per x che tende a 2 deve essere finito e non nullo, il valore 2 deve annullare anche il fattore al numeratore di molteplicità uno, quindi $2-c = 0 \rightarrow c = 2$.

Infine, per trovare il valore di a , utilizziamo l'informazione sull'asintoto obliquo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a(x-4)^2(x-2)}{x^2(x-2)} = 1 \rightarrow a = 1.$$

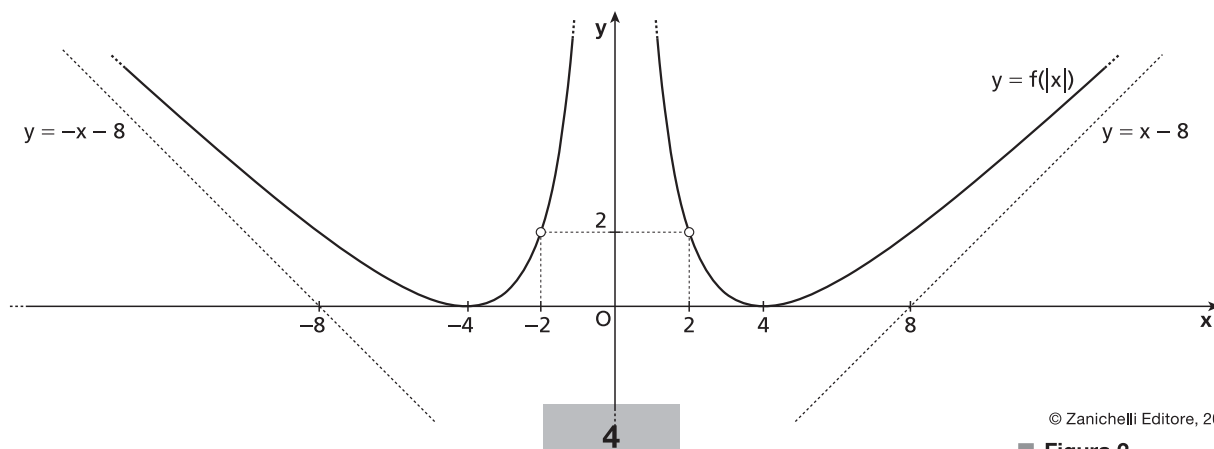
Sostituendo tutti i valori trovati, otteniamo la funzione

$$y = f(x) = \frac{1 \cdot (x-4)^2(x-2)}{x(x-2)} \rightarrow f(x) = \frac{(x-4)^2}{x}, \text{ con } x \neq 2$$

- c. Deduciamo il grafico di $y = f(|x|)$ sfruttando il fatto che $f(|x|)$ è pari:

se $x \geq 0 \wedge x \neq 2$ allora $f(|x|)$ ha lo stesso grafico di $f(x)$;

se $x < 0 \wedge x \neq -2$ si completa il grafico per simmetria rispetto all'asse y .



Dalla lettura del suo grafico possiamo dedurre che la funzione $f(|x|)$ ha dominio: $\mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$, per asintoti le rette $x = 0$ (asintoto verticale), $y = x - 8$ (asintoto obliquo destro) e $y = -x - 8$ (asintoto obliquo sinistro). Inoltre i punti $(-4;0)$ e $(4;0)$ sono minimi relativi e assoluti della funzione che è superiormente illimitata. L'insieme immagine è $\mathbb{R}^+$.

Deduciamo il grafico di $y = \ln(f(x))$ dal grafico di $f(x)$ operando i seguenti passaggi:

- *dominio*: $f(x) > 0 \rightarrow 0 < x < 2 \vee 2 < x < 4 \vee x > 4$;
- *zeri della funzione*: $f(x) = 1 \rightarrow x = x_1 \vee x = x_2$ con $2 < x_1 < 4$ e $4 < x_2 < 8$;
- *studio del segno*: $\ln(f(x)) > 0 \rightarrow f(x) > 1 \rightarrow 0 < x < 2 \vee 2 < x < x_1 \vee x > x_2$;
- *limiti agli estremi del dominio*: dal valore dei limiti di $f(x)$ possiamo dedurre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x)) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \ln(f(x)) = \ln 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0^+ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \ln(f(x)) = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = +\infty.$$

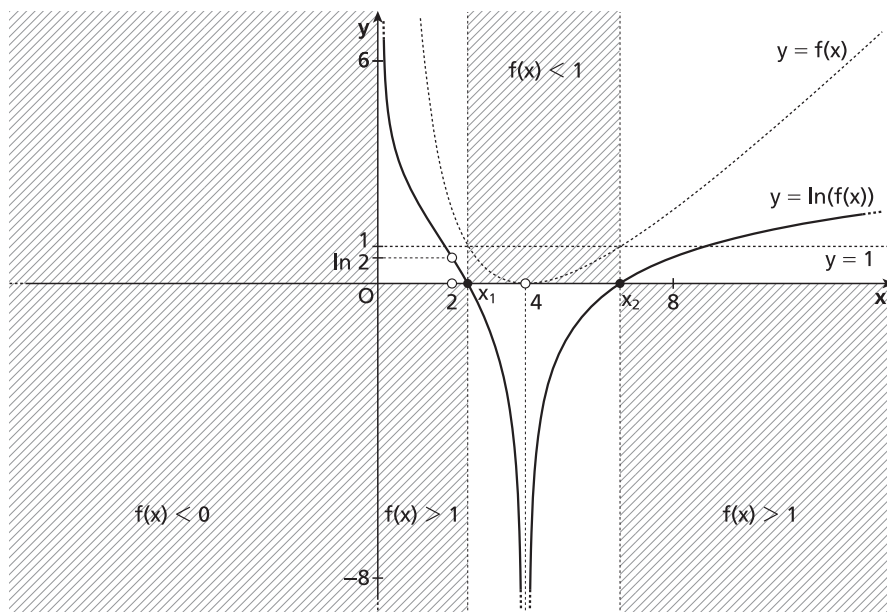
La funzione $\ln(f(x))$ ha asintoti verticali $x = 0$ (asintoto destro) e $x = 4$. Non ci sono asintoti orizzontali.

Poiché $f(x)$ ha asintoto obliquo $y = x - 8$, per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim x$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = 0$ per la gerarchia degli infiniti. Quindi, $\ln(f(x))$ non ha asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

- *estremi relativi*: La funzione logaritmica ha base maggiore di 1 quindi decresce dove decresce $f(x)$ per $0 < x < 4 \wedge x \neq 2$ e cresce dove cresce $f(x)$ per $x > 4$ non presentando estremi relativi perché il punto $x = 4$ è escluso dal dominio.

La funzione $y = \ln(f(x))$ ha come insieme immagine $\mathbb{R}$.

Riportando le informazioni acquisite in un piano cartesiano, otteniamo il seguente grafico.



■ Figura 3

Dalla lettura del grafico di $y = f(|x|)$, deduciamo che la funzione ha dominio $x > 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 4$, per asintoti le rette $x = 0$ (asintoto verticale destro), $x = 4$ (asintoto verticale) e non ci sono asintoti orizzontali od obliqui. La funzione non ha minimi o massimi relativi ed è inferiormente e superiormente illimitata e l'insieme immagine è tutto $\mathbb{R}$.

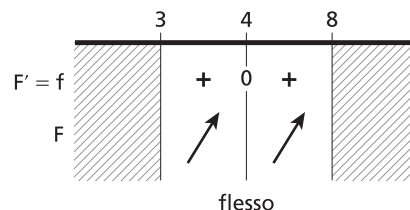
d. Consideriamo $F(x) = \int_3^x f(t) dt$ in $I = [3; 8]$.

Poiché f è continua e limitata in I , per il teorema fondamentale del calcolo integrale F è continua in $[3; 8]$ e derivabile in $[3; 8]$. Inoltre f è sempre maggiore o uguale a 0 in I quindi F è sempre non negativa e crescente in I .

Poiché $F'(x) = f(x)$, lo studio del segno della derivata prima di F coincide con il segno di f .

Perciò, in $x = 4$, F presenta un flesso a tangente orizzontale:

la retta tangente in quel punto ha coefficiente angolare $F'(4) = f(4) = 0$. Inoltre dalla tabella possiamo dedurre che F è monotona crescente definita su un intervallo limitato e chiuso quindi, come già dedotto prima, con minimo assoluto per $x = 3$ e massimo assoluto per $x = 8$. Anche se non espressamente richiesto, studiamo il valore di F agli estremi del dominio per rappresentare il punto di minimo e di massimo nel piano cartesiano:



■ Figura 4

$F(3) = 0$ per definizione;

$$F(8) = \int_3^8 f(t) dt = \int_3^8 \frac{(t-4)^2}{t} dt = \int_3^8 \frac{t^2 - 8t + 16}{t} dt = \int_3^8 \left(t - 8 + \frac{16}{t} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 8t + 16 \ln |t| \right]_3^8 =$$

$$\left[32 - 64 + 16 \ln 8 - \frac{9}{2} + 24 - 16 \ln 3 \right] = 16 \ln \frac{8}{3} - \frac{25}{2} \simeq 3,19.$$

Gli estremi assoluti della funzione sono dunque $(3; 0)$ e $(8; 16 \ln \frac{8}{3})$.

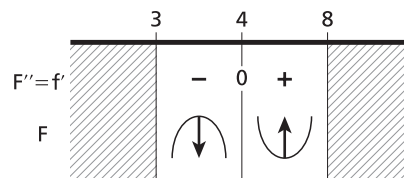
Per lo studio della concavità di $F(x)$, calcoliamo il segno della derivata seconda di F che coincide con $f'(x)$:

$$F''(x) = f'(x) = \left(\frac{(x-4)^2}{x} \right)' = \frac{2(x-4)x - (x-4)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-4)(2x - x + 4)}{x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}.$$

Poiché $x^2 > 0 \forall x \neq 0$, il segno di F'' è lo stesso del suo numeratore, perciò

$$F''(x) > 0 \leftrightarrow (x-4)(x+4) > 0 \leftrightarrow x < -4 \vee x > 4 \wedge x \neq 0$$

e, limitando lo studio all'intervallo di definizione, abbiamo la tabella.

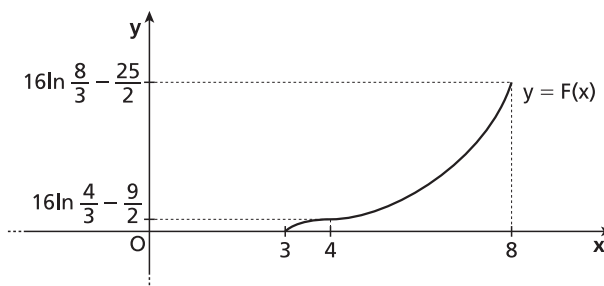


■ Figura 5

$$F(4) = \left[\frac{t^2}{2} - 8t + 16 \ln |t| \right]_3^4 = \left[8 - 32 + 16 \ln 4 - \frac{9}{2} + 24 - 16 \ln 3 \right] = 16 \ln \frac{4}{3} - \frac{9}{2} \simeq 0,10.$$

F ha quindi concavità rivolta verso il basso per $3 < x < 4$ e verso l'alto per $4 < x < 8$ e flesso in $(4; 16 \ln \frac{4}{3} - \frac{9}{2})$.

Rappresentiamo il grafico Γ .



■ Figura 6

PROBLEMA 2

- a. Le curve assegnate $f_a(x) = \frac{x^2-1}{e^{ax}}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, hanno dominio $D = \mathbb{R}$. Siano $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, con $a \neq b$; determiniamo le coordinate dei punti in comune tra $y = f_a(x)$ e $y = f_b(x)$:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2-1}{e^{ax}} \\ y = \frac{x^2-1}{e^{bx}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2-1}{e^{ax}} \\ \frac{x^2-1}{e^{ax}} = \frac{x^2-1}{e^{bx}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2-1}{e^{ax}} \\ e^{bx}(x^2-1) = e^{ax}(x^2-1) \end{cases}$$

La seconda equazione $(x^2-1)(e^{ax}-e^{bx}) = 0$ ha come soluzioni $x = \pm 1$ e $ax = bx$; poiché, per ipotesi, $a \neq b$ e $a, b \neq 0$ otteniamo $ax = bx \rightarrow (a-b)x = 0 \rightarrow x = 0$. Le coordinate dei tre punti in comune sono $D(1; 0)$, $E(-1; 0)$ ed $F(0; -1)$.

- b. Calcoliamo le derivate prima e seconda della funzione $f_a(x) = \frac{x^2-1}{e^{ax}} = (x^2-1)e^{-ax}$:

$$f'_a(x) = 2x \cdot e^{-ax} + (x^2-1) \cdot (-a)e^{-ax} = (-ax^2 + 2x + a)e^{-ax},$$

$$f''_a(x) = (-2ax + 2)e^{-ax} + (-ax^2 + 2x + a)(-a)e^{-ax} = (a^2x^2 - 4ax - a^2 + 2)e^{-ax},$$

entrambe definite su tutto $\mathbb{R}$.

Nello studio dei segni di $f'_a(x)$ e $f''_a(x)$ si può trascurare il fattore e^{-ax} perché è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$.

Il segno di $f'_a(x)$ è lo stesso del polinomio di secondo grado $-ax^2 + 2x + a$, in cui $\frac{\Delta}{4} = 1 + a^2 > 0$

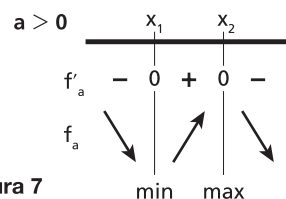
$\forall a \in \mathbb{R}$, per cui il polinomio ammette sempre due zeri distinti:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+a^2}}{a} \text{ e } x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+a^2}}{a}.$$

- Se $a > 0$ risulta che $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ e $f'_a(x) > 0$ per $x_1 < x < x_2$.

Quindi $y = f_a(x)$ è crescente per $x_1 < x < x_2$, decrescente per $x < x_1 \vee x > x_2$

e ammette un minimo relativo per $x = x_1$ e un massimo relativo per $x = x_2$.

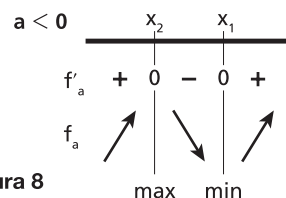


■ Figura 7

- Se $a < 0$ risulta che $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ e $f'_a(x) > 0$ per $x < x_2 \vee x > x_1$.

Quindi $y = f_a(x)$ è crescente per $x < x_2 \vee x > x_1$, decrescente per $x_2 < x < x_1$

e ammette un minimo relativo per $x = x_1$ e un massimo relativo per $x = x_2$.



■ Figura 8

Il segno di $f''_a(x)$ è lo stesso segno del polinomio di secondo grado $a^2x^2 - 4ax - a^2 + 2$ in cui:

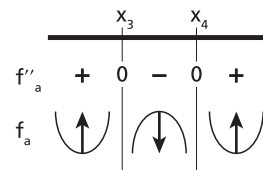
$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + a^4 - 2a^2 = a^4 + 2a^2 = a^2 = a^2 \cdot (a^2 + 2) > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\},$$

per cui il polinomio ammette sempre due zeri distinti:

$$x_3 = \frac{2a - \sqrt{a^2(a^2+2)}}{a^2} = \frac{2a - |a|\sqrt{a^2+2}}{a^2} \quad \text{e} \quad x_4 = \frac{2a + \sqrt{a^2(a^2+2)}}{a^2} = \frac{2a + |a|\sqrt{a^2+2}}{a^2}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ risulta che } x_3 < x_4 \rightarrow f''_a(x) > 0 \rightarrow x < x_3 \vee x > x_4.$$

Quindi $y = f_a(x)$ volge la convavità verso l'alto per $x < x_3 \vee x > x_4$ e la concavità verso il basso per $x_3 < x < x_4$ e ammette due punti di flesso per $x = x_3$ oppure $x = x_4$.



■ Figura 9

c. Le coordinate del punto F sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 - 1}{e^{ax}} \end{cases} \rightarrow F(0; -1).$$

F è un punto di flesso per $y = f_a(x)$ se risulta che $f_a''(0) = 0$, cioè, utilizzando il calcolo di $f_a''(x)$ già eseguito abbiamo $-a^2 + 2 = 0$, da cui $a = \pm\sqrt{2}$.

In corrispondenza di tali valori si ha un flesso in F perché, come analizzato nel punto b), la funzione derivata seconda cambia il segno e quindi la funzione $y = f_a(x)$ cambia la sua concavità.

Se $a = \sqrt{2}$ la retta tangente in F ha equazione:

$$f'(0) = \sqrt{2} \rightarrow y + 1 = \sqrt{2}(x - 0) \rightarrow y = \sqrt{2}x - 1.$$

Se $a = -\sqrt{2}$, la retta tangente in F ha equazione:

$$f'(0) = -\sqrt{2} \rightarrow y + 1 = -\sqrt{2}(x - 0) \rightarrow y = -\sqrt{2}x - 1.$$

d. Occorre verificare che $\forall x \in \mathbb{R} \ f_a(-x) = f_{-a}(x)$, con $a \neq 0$.

$$f_a(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{e^{-ax}} = \frac{x^2 - 1}{e^{-ax}}; \quad f_{-a}(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{-ax}}$$

Per cui è vero che le curve Γ_a e Γ_{-a} sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate.

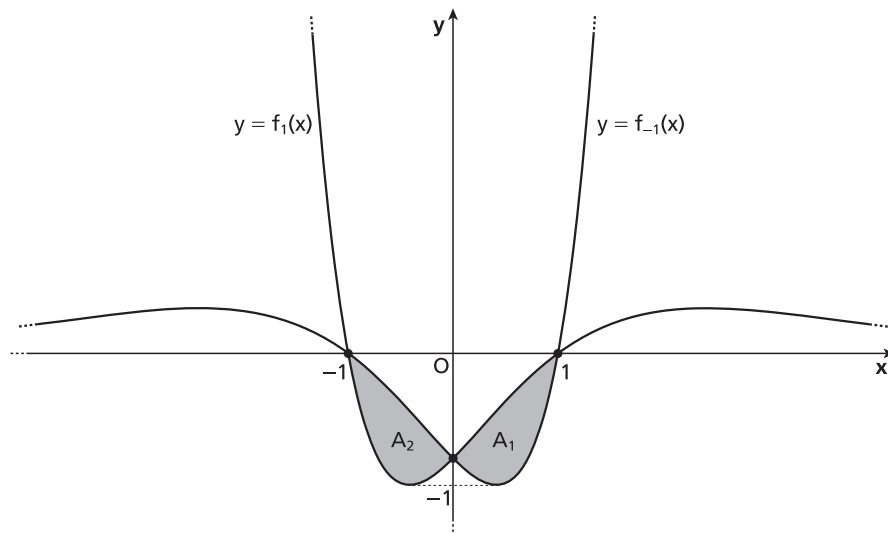
Anche se non è espressamente richiesto nel testo, per il calcolo dell'area della regione finita di piano delimitata dai grafici di Γ_1 e Γ_{-1} è opportuno visualizzarli sullo stesso piano cartesiano utilizzando le informazioni già acquisite e il calcolo dei limiti agli estremi del dominio:

$$\Gamma_1: D = \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = 0^+ \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = +\infty,$$

Γ_1 interseca gli assi in $(\pm 1; 0)$ e $(0; -1)$ ha un massimo relativo per $x = 1 + \sqrt{2}$ e un minimo relativo per $x = 1 - \sqrt{2}$.

$$\Gamma_{-1}: D = \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{e^{-x}} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{e^{-x}} = 0^+,$$

Γ_{-1} interseca gli assi in $(\pm 1; 0)$ e $(0; -1)$ ha un massimo relativo in $x = -1 - \sqrt{2}$ e un minimo relativo per $x = \sqrt{2} - 1$.



■ Figura 10

Per la simmetria dimostrata tra i grafici Γ_1 e Γ_{-1} , l'area richiesta è l'unione delle aree A_1 e A_2 , finite e simmetriche rispetto all'asse y , per cui calcoliamo il doppio della sola area A_1 posta nel quarto quadrante.

$$A_1 = \int_0^1 [f_1(x) - f_{-1}(x)] dx = \int_0^1 [(x^2 - 1)e^{-x} - (x^2 - 1)e^x] dx.$$

Per il calcolo delle due primitive si può integrare due volte con la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1)e^{-x} dx &= -(x^2 - 1)e^{-x} + \int 2xe^{-x} dx = -(x^2 - 1)e^{-x} - 2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx = \\ &= -(x^2 - 1)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -(x^2 + 2x + 1)e^{-x} + c = -(x + 1)^2 e^{-x} + c. \end{aligned}$$

Analogamente per il secondo termine, scriviamo:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 1)e^x dx &= (x^2 - 1)e^x - \int 2xe^x dx = (x^2 - 1)e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = \\ &= (x^2 - 1)e^x - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2 - 2x + 1)e^x + c = (x - 1)^2 e^x + c. \end{aligned}$$

Quindi:

$$A_1 = [-(x + 1)^2 e^{-x} - (x - 1)^2 e^x]_0^1 = -\frac{4}{e} + 1 + 1 = 2 - \frac{4}{e}.$$

L'area richiesta vale pertanto:

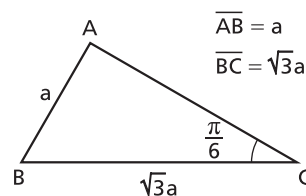
$$A = 2 \cdot A_1 = 4 - \frac{8}{e} \simeq 1,06.$$

QUESTIONARIO

1 Per la prima ipotesi, consideriamo il triangolo in figura.

Se $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$, allora per il teorema dei seni dei triangoli qualsiasi vale la relazione:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{BCA}} = \frac{\overline{BC}}{\sin \widehat{BAC}} \rightarrow \frac{a}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sin \widehat{BAC}} \rightarrow \sin \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



■ Figura 11

Se $\sin \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, allora $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3} \vee \widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

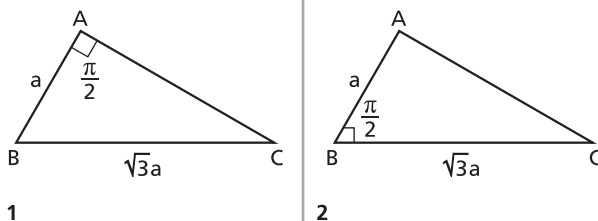
Analizziamo i due casi:

- se $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, abbiamo che $\widehat{ABC} = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ e il triangolo è rettangolo;
- se $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$, abbiamo che $\widehat{ABC} = \pi - \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ e il triangolo non è rettangolo.

Quindi l'affermazione è *falsa* perché l'ipotesi $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ non implica necessariamente che il triangolo ABC sia rettangolo.

Per la seconda ipotesi, consideriamo i due casi possibili (l'angolo retto non può essere opposto ad AB, perché ad angolo maggiore è opposto lato maggiore):

Consideriamo il caso 1).



■ Figura 12 1

2

Se $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$, per il teorema dei triangoli rettangoli abbiamo che

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \sin \widehat{BCA} \rightarrow \sin \widehat{BCA} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \neq \sin \frac{\pi}{6},$$

quindi $\widehat{BAC}$ non è $\frac{\pi}{6}$.

Anche senza considerare l'altro caso, possiamo già concludere che l'affermazione è *falsa* perché non è sempre verificata.

2 Nel salvadanaio abbiamo a disposizione 15 monete di cui 9 monete da un euro e 6 monete da due euro. Indichiamo con X il totale della somma ottenuta dall'estrazione. Possiamo ottenere il valore $x = 10$ euro con:

- 5 monete da due euro;
- 4 monete da due euro e 2 monete da un euro;
- 3 monete da due euro e 4 monete da un euro;
- 2 monete da due euro e 6 monete da un euro;
- 1 moneta da due euro e 8 monete da un euro.

Poiché estraiamo contemporaneamente esattamente 6 monete, l'unica combinazione possibile è estrarre 4 monete da due euro e 2 monete da un euro. Quindi:

$$p(X = 10) = \frac{\binom{6}{4} \binom{9}{2}}{\binom{15}{6}} = \frac{15 \cdot 36}{5005} \simeq 0,108 = 10,8\%.$$

Determiniamo ora la possibilità che il totale sia al massimo 10 euro, quindi $p(X \leq 10)$.

Poiché $p(X \leq 10) = 1 - p(X > 10)$, per determinare la probabilità che il totale non superi i 10 euro, possiamo calcolare l'evento complementare $p(X > 10)$ che contiene solo due casi, cioè che le 6 monete estratte siano:

- 6 monete da due euro;
- 5 monete da due euro e 1 da un euro

e ottenere:

$$p(X > 10) = p(X = 12) + p(X = 11) = \frac{\binom{6}{6} \binom{9}{0}}{\binom{15}{6}} + \frac{\binom{6}{5} \binom{9}{1}}{\binom{15}{6}} = \frac{1 + 54}{5005} = \frac{11}{1001},$$

da cui segue:

$$p(X \leq 10) = 1 - p(X > 10) = 1 - \frac{11}{1001} \simeq 0,989 = 98,9\%.$$

3 Per stabilire se i punti $O(0; 0; 0)$, $A(1; 4; 8)$, $B(-6; 0; 12)$ e $C(-7; -4; 4)$ sono complanari, determiniamo l'equazione cartesiana del piano π che contiene i primi tre punti e verifichiamo che il quarto punto appartenga al piano π trovato.

Determiniamo quindi l'equazione del piano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ imponendo il passaggio per i punti O , A e B :

$$\begin{array}{l} \text{per } O \begin{cases} d = 0 \end{cases} \\ \text{per } A \begin{cases} a + 4b + 8c + d = 0 \end{cases} \\ \text{per } B \begin{cases} -6a + 12c + d = 0 \end{cases} \end{array} \rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 10c + 4b = 0 \\ a = 2c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = -\frac{5}{2}c \\ a = 2c \end{cases}$$

da cui $2cx - \frac{5}{2}cy + cz = 0$ e, dividendo per $\frac{c}{2}$, con c non nullo, otteniamo $\pi: 4x - 5y + 2z = 0$.

Sostituiamo ora le coordinate del punto C all'equazione del piano π per controllare se la soddisfano

$$4 \cdot (-7) - 5 \cdot (-4) + 2 \cdot 4 = 0 \rightarrow -28 + 20 + 8 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

e, poiché abbiamo ottenuto un'identità, possiamo affermare che i quattro punti sono complanari.

Per calcolare il perimetro di $OABC$, calcoliamo la lunghezza dei lati:

$$\overline{OA} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-4)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{1+16+64} = 9;$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+6)^2 + (4-0)^2 + (8-12)^2} = \sqrt{49+16+16} = 9;$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-6+7)^2 + (0+4)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{1+16+64} = 9;$$

$$\overline{CO} = \sqrt{(-7-0)^2 + (-4-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{49+16+16} = 9.$$

Quindi, il perimetro del quadrilatero è $4 \cdot 9 = 36$.

Il quadrilatero $OABC$ è un rombo perché è un quadrilatero con tutti i lati congruenti.

Per stabilire se $OABC$ sia un quadrato, dobbiamo verificare che abbia anche tutti gli angoli retti; per fare ciò basta verificare che abbia almeno un angolo retto perché, essendo un rombo, è anche un parallelogramma. Se fosse un quadrato, ciascuno dei due triangoli formati dalla diagonale AC dovrebbe essere rettangolo. Consideriamo il triangolo OAC e calcoliamo

$$\overline{AC} = \sqrt{(1+7)^2 + (4+4)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{64+64+16} = 12.$$

Stabiliamo se è verificato il teorema di Pitagora:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = 9^2 + 9^2 = 162, \overline{AC}^2 = 12^2 = 144 \rightarrow \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 \neq \overline{AC}^2.$$

Non vale, quindi, il teorema di Pitagora, per cui OAC non è un triangolo rettangolo e possiamo classificare il quadrilatero $OABC$ come un rombo.

Calcoliamo la lunghezza della diagonale OB :

$$\overline{OB} = \sqrt{(0+6)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{36+144} = 6\sqrt{5};$$

$$\text{per cui l'area di } OABC \text{ è } A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{2} = 36\sqrt{5}.$$

- 4** Data la funzione logaritmica $f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right)$, con a reale positivo, per trovare il dominio di f dobbiamo porre l'argomento del logaritmo maggiore di 0 e risolvere la disequazione $\frac{ax-7}{x^2} > 0$.

Poiché $x^2 > 0$ per $x \neq 0$, il denominatore è sempre positivo e il segno della frazione è concorde con quello del numeratore, quindi:

$$\frac{ax-7}{x^2} > 0 \rightarrow ax-7 > 0 \wedge x \neq 0.$$

Essendo a positivo, possiamo dividere per a senza cambiare il verso della disequazione e ottenere che il dominio è $x > \frac{7}{a}$, con $\frac{7}{a}$ sempre maggiore di 0.

Per soddisfare il teorema di Rolle nell'intervallo chiuso e limitato $I=[1; 7]$, f deve essere:

continua in $[1; 7]$;

derivabile in $]1; 7[$;

tale che $f(1) = f(7)$.

Verifichiamo le condizioni del teorema.

- f è definita e continua in $x > \frac{7}{a}$, perciò dobbiamo porre la condizione $1 > \frac{7}{a} \rightarrow a > 7$. Quindi per $a > 7$, f è continua in I .
- Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{ax-7}{x^2}} \cdot \frac{a \cdot x^2 - (ax-7) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2}{ax-7} \cdot \frac{-ax+14}{x^3} = \frac{-ax+14}{x(ax-7)}.$$

Il denominatore di f' è diverso da 0 per $x \neq 0 \wedge x \neq \frac{7}{a}$, quindi f è derivabile in $]1; 7[$ per $a > 7$.

- Poniamo la condizione $f(1) = f(7)$:

$$\ln(a-7) = \ln\left(\frac{7a-7}{49}\right) \rightarrow a-7 = \frac{7(a-1)}{49} \rightarrow 7(a-7) = a-1 \rightarrow 6a = 48 \rightarrow a = 8$$

accettabile perché maggiore di 7.

La funzione soddisfa quindi il teorema per $a = 8$.

Il teorema di Rolle garantisce l'esistenza di almeno un punto c interno all'intervallo I tale che $f'(c) = 0$.

Sostituiamo $a = 8$ nella derivata prima calcolata in precedenza e otteniamo $f'(x) = \frac{-8x+14}{x(8x-7)}$, da cui

$$f'(c) = 0 \rightarrow -8c + 14 = 0 \rightarrow c = \frac{7}{4}.$$

Per determinare l'ordinata del punto cercato calcoliamo il valore della funzione in $\frac{7}{4}$:

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \ln\left(\frac{8 \cdot \frac{7}{4} - 7}{\frac{49}{16}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{7}{49}}{\frac{16}{16}}\right) = \ln\left(7 \cdot \frac{16}{49}\right) = \ln \frac{16}{7}.$$

Il punto ha quindi coordinate $\left(\frac{7}{4}, \ln \frac{16}{7}\right)$.

- 5** La funzione assegnata $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{2x^2 + 5x - 1}$ è razionale fratta ed esiste se $2x^2 + 5x - 1 \neq 0$,

cioè $x \neq \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{4} \rightarrow x \neq \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$. Affinché la retta di equazione $y = 2$ sia

asintoto orizzontale per $y = f(x)$, deve risultare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$. Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{a}{2} \rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4.$$

Affinché la funzione $y = f(x)$ ammetta un punto stazionario in $x = 1$, deve risultare che $f'(1) = 0$. Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$, ponendo $a = 4$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(8x+b)(2x^2+5x-1) - (4x^2+bx+3)(4x+5)}{(2x^2+5x-1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{16x^3} + 40x^2 - 8x + 2bx^2 + \cancel{5bx} - b - \cancel{16x^3} - 20x^2 - 4bx^2 - \cancel{5bx} - 12x - 15}{(2x^2+5x-1)^2} = \\ &= \frac{(20-2b)x^2 - 20x - 15 - b}{(2x^2+5x-1)^2}; \\ f'(1) &= \frac{20-2b-20-15-b}{6^2} = \frac{-3b-15}{36} = -\frac{b+5}{12}; \\ f'(1) &= 0 \rightarrow b = -5. \end{aligned}$$

La funzione richiesta ha equazione: $f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 3}{2x^2 + 5x - 1}$ che, come imposto, ammette l'asintoto orizzontale $y = 2$, per cui non può ammettere asintoti obliqui, non essendo verificata la condizione necessaria $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

La funzione $y = f(x)$ ammette invece due asintoti verticali poiché, per $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$ e $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}$, risulta che $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) = \pm \infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_2^+} f(x) = \mp \infty$.

Quindi le rette di equazioni $x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}$ e $x = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}$ sono asintoti verticali di $y = f(x)$.

6 È assegnata l'iperbole equilatera $xy = k$, con $k \neq 0$, che si può scrivere nella forma $y = \frac{k}{x}$, la cui derivata prima ha equazione $y' = -\frac{k}{x^2}$. Detto $P(a; \frac{k}{a})$ con $a \neq 0$ un generico punto nell'iperbole, determiniamo l'equazione della retta tangente t in P :

$$y'(a) = m = -\frac{k}{a^2} \rightarrow$$

$$y - \frac{k}{a} = -\frac{k}{a^2}(x - a) \rightarrow t: y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a}.$$

Troviamo le coordinate dei punti A e B in cui la retta t interseca gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2a \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(2a; 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2k}{a} \end{cases} \rightarrow B(0; \frac{2k}{a}).$$

Per calcolare l'area del triangolo APO , tracciamo l'altezza PH parallela all'asse y .
Risulta che:

$$\overline{PH} = \left| \frac{k}{a} - 0 \right| = \left| \frac{k}{a} \right| \text{ e } \overline{AO} = |2a - 0| = |2a|,$$

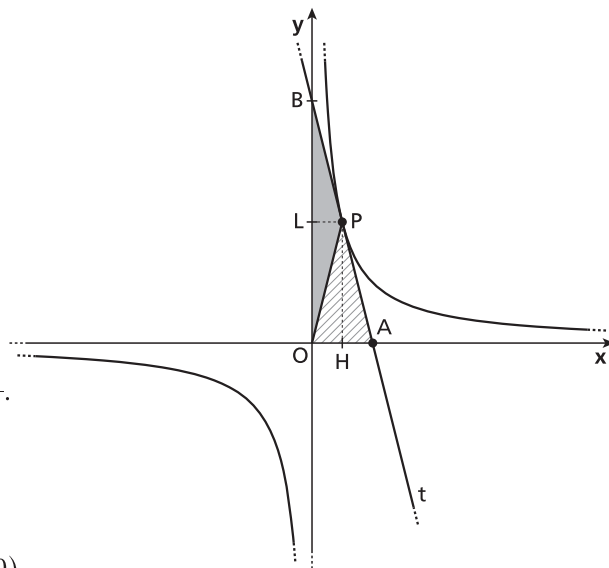
$$\text{Area}(APO) = \frac{1}{2} \left| \frac{k}{a} \right| \cdot |2a| = |k|.$$

Analogamente per calcolare l'area del triangolo BPO , tracciamo l'altezza PL parallela all'asse x .
Risulta che:

$$\overline{PL} = |a - 0| = |a| \text{ e } \overline{BO} = \left| \frac{2k}{a} - 0 \right| = \left| \frac{2k}{a} \right|,$$

$$\text{Area}(BPO) = \frac{1}{2} |a| \cdot \left| \frac{2k}{a} \right| = |k|.$$

Quindi le aree dei due triangoli APO e BPO sono uguali e il loro valore dipende solo da k e non dalla scelta del punto P .



■ Figura 13

7 L'intensità della corrente variabile nel tempo attraverso il resistore di resistenza R è espressa dalla funzione $I(t) = I_0 \cdot \frac{a}{t}$, definita e continua per $t > 0$.

La potenza dissipata nel resistore per effetto Joule è espressa dalla funzione $P(t) = RI^2(t) = R \cdot I_0^2 \cdot \frac{a^2}{t^2}$, anch'essa definita e continua per $t > 0$.

Per calcolare il valore medio della potenza nell'intervallo chiuso e limitato $[2a; 3a]$ con $a > 0$, è possibile applicare il teorema della media integrale:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \frac{1}{3a - 2a} \int_{2a}^{3a} RI_0^2 \frac{a^2}{t^2} dt = \\ &= \frac{1}{a} \cdot RI_0^2 a^2 \int_{2a}^{3a} \frac{1}{t^2} dt = RI_0^2 a \left[-\frac{1}{t} \right]_{2a}^{3a} = RI_0^2 a \left(-\frac{1}{3a} + \frac{1}{2a} \right) = \frac{RI_0^2}{6}, \text{ espresso in watt.}\end{aligned}$$

8 Il triangolo di Tartaglia fornisce i coefficienti dello sviluppo della potenza n -esima di un binomio $(a + b)^n$:

$n = 0$	1	$(a + b)^0$
$n = 1$	1 1	$(a + b)^1$
$n = 2$	1 2 1	$(a + b)^2$
$n = 3$	1 3 3 1	$(a + b)^3$
$n = 4$	1 4 6 4 1	$(a + b)^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Se $0 \leq m \leq n$, la m -esima posizione della n -esima riga, nella sequenza, è occupata dal numero che prende proprio il nome di *coefficiente binomiale* e vale

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

La formula del binomio di Newton si può scrivere nella forma:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} b^m.$$

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{m}$, che nel calcolo combinatorio esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti distinti di classe m , si ritrova nel calcolo delle probabilità affrontando il «problema delle prove ripetute» o di Bernoulli.

Esso consiste nella seguente situazione:

dato un esperimento aleatorio che si può ripetere nelle stesse condizioni per n volte, sia E l'evento che rappresenta il successo dell'esperimento che ha probabilità costante p di verificarsi e $q = 1 - p$ di non verificarsi.

La probabilità di ottenere m successi su n prove è data dalla formula:

$$p_{(m,n)} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}.$$

Questa espressione mette in evidenza il legame fra i coefficienti binomiali e il calcolo delle probabilità.

L'esempio fornito nel testo alla fine del brano scritto da Leonardo Sinisgalli, cioè quello «di fare m volte croce in n partite giuocate a testa e croce» è un noto caso di prova ripetuta.

In tale situazione, per calcolare la corrispondente probabilità, si può ricorrere alla suddetta formula

$p_{(m,n)} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$ ponendo $p = \frac{1}{2}$ (probabilità di ottenere croce) e anche $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (probabilità di ottenere testa).